1.臨界現象における普遍性とくり込み群(臨界現象,研究会報告)

鈴木, 増雄

「臨界現象における普遍性とくり込み群」

東大理　　鈴　木　増　雄

臨界現象にとって，もっとも基本的な概念の一つは，臨界指数の普遍性である。今までの古い普遍性は，普通に臨界温度からの差をもとにして定義された臨界指数が系の細かいことによらず，1. 次元d， 2. 対称性又は内部自由度の次元n， 及び 3. 相互作用のポテシャル・レイジのパラメータσのみ依存することを主張するものである。ところが最近，厳密に解いた結果で，これに反するものがいくつも現れ始めた。そこで，そういう一見例外的と思えるものまで含めて一般的に成立する概念として，「弱い普遍性」が著者によって提案された。[1] それによると，次のように，相関距離の臨界指数 ν によって規格化された臨界指数

$$\hat{\gamma}=\frac{\gamma}{\nu},\quad \hat{\beta}=\frac{\beta}{\nu'},\quad \hat{\triangle}=\frac{\triangle}{\nu},\quad \phi=\frac{2-\alpha}{\nu},\quad \hat{\eta}=\eta,\quad \hat{\delta}=\delta,\quad \text{etc} \tag{1}$$

が系の細かいことに依らず普通である。臨界現象にとって最も物理的に本質的な役割を果すものは，温度差 ($T-T_c$) そのものではなく，相関距離ξ である。これは，くりこみ群の立場からも支持される。従って，温度に関係する異常性に対しては，ξを基礎にして，その臨界指数を定義するのが，もっとも自然であり物理的である。これがとりも直さず，(1) の主張である。η や δ は，温度差に関係ないので，そのものが，今まで通り普遍になる。比熱の臨界指数 α は，自由エネルギーの温度に関する二階微分であり，自由エネルギーの方が基本的な物理量であるから，ϕ が普遍になる。以下に，なまの臨界指数は格子や相互作用の詳細な事柄に依存する例を列挙するが，一般的にくり込み群の理論でも，このことは，ある程度理解される。即ち，ξ と ($T-T_c$) の関係は，系の詳細に依存し得るのである。さて，naive universality は破綻するが，weak universality は成立する種類の臨界現象を列挙しよう。

1. hidden variables に基づく Fisher[2] のくり込まれた臨界指数：

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{1-\alpha},\quad \beta' = \frac{\beta}{1-\alpha},\quad \gamma' = \frac{\gamma}{1-\alpha},\quad \cdots,\quad \eta' = \eta,\quad \delta' = \delta \tag{2}$$

明らかに，これらは，（1）のweak universalityを満たしている：

$$\hat{\gamma}' = \frac{\gamma'}{\nu'} = \frac{\gamma}{\nu} = \hat{\gamma} = \text{ universal}$$

$$\phi' = \frac{2-\alpha'}{\nu'} = \frac{2-\alpha}{\nu} = \phi = \text{ universal, etc.} \tag{3}$$

2. Eight-vertex model も Gunton 達[3]によって，くり込み群と関連づけて詳細に論じられている通り，weak universality の好例になっている。 このモデルは，良く知られている通り，臨界指数 α，β，γ 等は，相互作用の強さと共に連続的に変化する。 これは，我々の立場からは，相関距離 ξ と $T-T_c$ の関係がたまたま複雑になり，ν が相互作用の強さに依存して，それにひきずられて，他の臨界指数も変化しているだけであって，ν で規格化した臨界指数は普遍になっている。

3. 3体力の3角格子。 Baxter と Wu[4]は2次元でこの問題を厳密に解いて，$\alpha = \alpha' = \frac{2}{3}$ を得た。このように大きな α の値も， weak universality[1] の立場では，たまたま，ν が理想イジング模型の値 $\nu = 1$ から大きくはずれ，$\nu = \nu' = \frac{2}{3}$ になったことに依るものとして理解される。実際，weak universalityから，次の値が予想されていた[1]：

$$\nu = \nu' = \frac{2}{3},\quad \beta = \frac{1}{12},\quad \gamma = \frac{7}{6},\quad \eta = \frac{1}{4},\quad \delta = 15, \tag{4}$$

ごく最近，$\beta = \frac{1}{12}$ が確認された。[5),6)] そのうちに他の予想値も遠からず，確認されるものと期待される。

4. 特殊な2体力イジング模型 (by Jüngling[7),8)]) ：彼は，彼のモデルをBaxter model と類似した4体力イジング・モデルに変換して，臨界指数が相互作用と共に連続的に変るこ とを示した。これも，weak universality は満足している。

5. 飾りつきのイジング模型。Yeh[9]は，飾りつきの正方イジング格子に対して，その相互作用の強さを適当にとれば，自由エネルギーは次のような異常性を持つことを示した：

$$F_{sing} \cong -\frac{kT_c}{\pi}\int dr^2 \log\left[r^2 + f(K)\right] \tag{5}$$

但し,

$$f(K) \simeq a_4 \cdot (K-K_c)^4 + \cdots\cdots \ ; \quad K = J/kT. \tag{6}$$

$$f(K) \simeq a_2 \cdot (K-K_c)^2 \tag{7}$$

に対応している。明らかに,(5)のYehの結果からは,$\alpha = \alpha' = -2$,$\nu = 2$,$\beta = 1/4$,$\gamma = 7/2$。これは,再びweak universalityを満たしている。飾りつきを複雑にすると,Yehの議論は容易に拡張できて,

$$f(K) \simeq a_{2n} \cdot (K-K_c)^{2n} + \cdots\cdots \ ; \quad n = 1, 2, 3, \tag{8}$$

とすることができる。この一般の場合には,

$$\alpha = \alpha' = 2(1-n), \ \beta = n/8, \ \nu = \nu' = n, \ \gamma' = \gamma = 7n/4 \tag{9}$$

これらも,明らかに(1)を満たしている。これらの臨界指数は,すべて,温度差の定義の修正$K-K_c \to (K-K_c)^n$に由来している。

6. percolationと disordered magnetic systems[10〜14];現在のところ,これらの数値的な結果[10〜14]は,weak universalityの仮説を近似的に満足している。もっと正確な計算が今後望まれる。

次に,weak universalityをcritical dynamicsへ拡張する:動的臨界指数,例えば,線型及び非線型臨界緩和指数[15,16]は,νで規格化したとき普遍になると期待される:即ち,

$$\hat{\Delta}^{(\ell)} = \Delta^{(\ell)}/\nu \quad \text{and} \quad \hat{\Delta}^{(n,\ell)} = \Delta^{(n,\ell)}/\nu \tag{10}$$

が系の詳細に依らない。従って,Fisher and Rácz [17,18]のスケーリング関係式は,次のように普遍型に表現される:

$$\hat{\Delta}^{(\ell)} - \hat{\Delta}^{(n,\ell)} = \hat{\beta} \tag{11}$$

その他,量子効果[19],quantum cross-over effect[20],量子系と古典系との漸近的等価性等を報告した。もっと詳しくは,他の論文を参照して下さい。[21]

参 考 文 献

1. M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **51** (1974) 1992.
2. M. E. Fisher, Phys. Rev. **176** (1968) 257.
3. J. D. Gunton and Th. Niemeijer, Phys. Rev. **B11** (1975) 567.
4. R. J. Baxter and F. Y. Wu, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 1294.
5. R. J. Baxter, M. F. Sykes and M. G. Watts, J. Phys. A : Math. Gen. Vol. 8. (1975) 245.
6. R. J. Baxter and I. G. Enting, J. Phys. A (in press).
7. K. Jüngling and G. Obermair, J. Phys. C : Solid St. Phys. **7** (1974) L 363. K. Jüngling, ibid. **8** (1975) L 169 ; **9** (1976) L 1 and L 139.
8. K. Jüngling, Z. Physik **B24** (1976) 391.
9. H. T. Yeh, Physica **64** (1973) 427.
10. D. S. Gaunt and M. F. Sykes, J. Phys. A : Math. Gen. Vol. **9** (1976) 1109.
11. A. P. Young, J. Phys. C : Solid State Phys. Vol. 9 (1976) 2103.
12. M. A. A. Cox, J. W. Essam and C. M. Place, preprint.
13. A. G. Dunn, J. W. Essam and D. S. Ritchie, J. Phys. C : Solid St. Phys. **8** (1976) 4219.
14. J. W. Essam, K. M. Gwilym and J. M. Loveluck, J. Phys. C : Solid St. Phys. **9** (1976) 365.
15. M. Suzuki, Int. J. Magnetism **1** (1971) 123.
16. K. Binder, Phys. Rev. **B8** (1973) 3423.
17. M. E. Fisher and Z. Rácz, Phys. Rev. (in press).
18. M. Suzuki, Phys. Lett. **58A** (1976) 435.
19. M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1454.
20. M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1007.
21. M. Suzuki, ボーズ統計50周年記念理論物理国際会議及び冬の学校（1977年1月6日～25日ニューデリー）のプロシーディングス。